Equation différentielle du second ordre à coefficient constant

I. Définitions

On appelle équation différentielle du 2^{nd} ordre à coefficient constant, toute équation de la forme : $a.y''(x)+b.y'(x)+c.y(x)=f(x)$ (ξ) où $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $f \in C(I,\mathbb{R})$, I intervalle de $\mathbb{R}$.

On appelle équation homogène associée à (ξ), l'équation (ξ_0) suivante : $a.y''(x)+b.y'(x)+c.y(x)=0$

Théorème : Les solutions de l'équation (ξ) sont les fonctions suivantes : $y(x)=y_0(x)+y_P(x)$ où y_0 est la solution générale de (ξ_0) et y_P une solution particulière de (ξ).

II. Méthode d'application

1. Recherche d'une solution générale de (E_0)

On considère l'équation caractéristique associée à (E_0) : $ar^2+br+c=0$

- **1^{er} cas :** si $\Delta>0$, (e) admet 2 racines simples réelles différentes : r_1 et r_2.
  Alors la solution générale de (ξ_0) est : $y_H(t)=C_1.e^{r_1x}+C_2.e^{r_2x}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
- **$2^{ème}$ cas :** si $\Delta=0$, (e) admet une racine réelle double : r_1.
  Alors, la solution générale de (ξ_0) est : $y_0(x)=(C_1x+C_2).e^{r_1x}$ avec $C_1,C_2 \in \mathbb{R}$.
- **$3^{ème}$ cas :** si $\Delta<0$, (e) admet 2 racines complexes conjuguées : $z_1=\alpha+i\beta$ et $z_2=\alpha-i\beta$.
  Alors la solution générale de (ξ_0) est : $y_0(x)=e^{\alpha x}(C_1.\cos(\beta x)+C_2.\sin(\beta x))$ avec $C_1,C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Recherche d'une solution particulière de (E)

1^{er} cas :

$f(x)=e^{nx}Q(x)$ où $n \in \mathbb{C}$ et Q est un polynôme de degré q. On cherche alors une solution particulière y_P de la forme suivante : $y_P(x)=e^{nx}P(x)$ où P est un polynôme de degré p.

- P=q si n n'est pas racine de (e)
- P=q+1 si n est racine simple de (e)
- P=q+2 si n est racine double de (e)

$2^{ème}$ cas :

$f(x)=e^{nx}(A\cos(\omega x)+B.\sin(\omega x))$ où $A,B,\omega,n \in \mathbb{R}$. On cherhce la solution particulière sous la même forme : $y_P(x)=e^{\alpha x}(\beta.\cos(\omega x)+\gamma.\sin(\omega x))$.

On veut que y_P soit solution de (ξ) et on l'injecte donc dans (ξ) pour déterminer β et γ.